M. Braune

Die Rolle des Gedankenexperimentes in Mathematik und Naturwissenschaft

Erstmalig nähert man sich diesem ideengeschichtlichen Thema am besten durch Betrachtung einfacher illustrierender Beispiele.
In der Antike besprachen die Alten die Frage, ob sich der tiefliegende Wasserspiegel in einem Brunnenschacht durch ständiges Einwerfen von Kieselsteinen bis zum oberen Brunnenrand heben ließe, und erzählten dazu die Geschichte vom durstigen klugen Raben. Zwar verdrängen die ersten eingeworfenen Steine entsprechend ihres Volumens Teile des Brunnenwassers, aber ob sich der Wasserspiegel bei Fortsetzung schneller hebt als das ebenfalls nach oben wachsende Haufwerk geschütteter Kieselsteine, bleibt zunächst unentschieden. Denkbar ist auch, dass die oberen Schichten der Kieselsteinschüttung „trocken" bleiben, weil das Brunnenwasser nicht alle Ritzen zwischen den Steinen zu füllen vermag.
Man nennt das Gesamtvolumen aller Kieselsteine das Substanzvolumen, das Gesamtvolumen aller zwischen den Steinen vorhandenen Ritzen das Porenvolumen und bezeichnet die Summe von Substanzvolumen und Porenvolumen als Schüttvolumen des Haufwerkes.
Wegen der mathematisch nicht zu fassenden Vielfalt der Kieselsteinformen und deren Lagebeziehungen im geschütteten Haufwerk reduziert man die Problematik des durstigen Rabens idealisierend im Gedankenexperiment, wo identische Kugeln dicht gepackt die Kieselsteine ersetzen. Bei einer solchen dichten Kugelpackung im Raum sitzen die Mittelpunkte dieser sich jeweils berührenden Kugeln auf den Kantenmitten einer Würfelzelle, eine Kugel passt noch genau in die Zellenmitte, und die jetzt mögliche elementargeometrische Rechnung ergibt für die Kugelschüttung den Porenvolumenanteil zu rund 26 Prozent. Bei gut gerundeten Kieselsteinen gleicher Korngrößenklasse mit vergleichbarer Raumausfüllung könnte der durstige Rabe trinken, wenn der anfängliche Wasserstand im Brunnen bereits mehr als 26 Prozent des gesamten Brunnenschachtes ausfüllt.
Hier konnte das Gedankenexperiment einen nützlichen Schätzwert liefern.

Bei mathematischen Untersuchungen und besonders bei der Anwendung mathematischer Methoden auf Probleme der Naturwissenschaften liegt häufig die Situation vor, dass die Lösung eines idealisierten Problems gelingt, die Behandlung eines dazu benachbarten Problems, dessen Lösung wegen des Praxisbezugs dringend benötigt wird, wegen zusätzlicher erheblicher Schwierigkeiten nicht möglich war.
Die Hoffnung, dass „eng benachbarte" Probleme auch „eng benachbarte" Lösungen besitzen, erfüllt sich häufig, und die Kultivierung der theoretisch schwierigen Methoden der dafür entwickelten Störungsrechnung hat

viele schöne Ergebnisse für Himmelsmechanik und Quantenmechanik hervorgebracht.
Gelingt es, das mathematische Modell für das gewünschte Problem als Kombination des mathematischen Modells für das benachbarte und bereits gelöste idealisierte Problem mit einem die Unterschiede beschreibenden „Störterm" zu formulieren, ist die Anwendung der Störungsrechnung vorbereitet.
Man versieht den Störterm im mathematischen Modell für das gewünschte Problem mit einem Faktor. Für Faktor gleich Null erhält man das mathematische Modell für das idealisierte Problem zurück, im Fall Faktor gleich Eins steht das mathematische Modell für das gewünschte Problem bereit.
Der Lösungsansatz für das gewünschte Problem setzt sich zusammen aus der bereits bekannten Lösung für das idealisierte Problem und einer Reihe, die nach Potenzen des Faktors fortschreitet und als Koeffizienten noch zu bestimmende anfänglich unbekannte Funktionen besitzt.
Trägt man diesen Lösungsansatz in das mathematische Modell für das gewünschte Problem ein, so entsteht eine Vielfalt von Termen mit unterschiedlichen Potenzen des Faktors. Aus Termen mit gleicher Potenz des Faktors bildet man der Reihe nach Bestimmungsgleichungen für die noch zu bestimmenden Funktionen, deren Lösungen die unter Verwendung bereits ermittelter Kenntnisse anschließend den Lösungsansatz ausfüllen.
Die schwierige Frage, ob die aufgebaute Potenzreihe für Faktor gleich Eins gegen die Lösung des gewünschten Problems konvergiert, ist oft nur sehr schwer zu beantworten, manchmal begnügt man sich auch mit einer verkürzten Näherungslösung bescheidener Genauigkeit.

Literatur:

Miller, M.
Stereometrie
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1957

Toth, L. F.
Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum
Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953

Coxeter, H. S. M.
Unvergängliche Geometrie
Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1963

Bellman, R.
Methoden der Störungsrechnung in Mathematik, Physik und Technik
R. Oldenbourg Verlag München und Wien 1967

Anhang

Sei z. B. der Lösungsvektor x_0 des inhomogenen linearen Gleichungssystems mit regulärer Koeffizientenmatrix A

$$Ax_0=b;\ x_0=A^{-1}b \tag{1}$$

bekannt, dann liefert die Anwendung der Störungsrechnung die Lösung x des gegenüber (1) benachbarten Gleichungssystems

$$(A-S)x=b;\ \ x=(A-S)^{-1}b=(A(E-A^{-1}S))^{-1}b=(E-A^{-1}S)^{-1}A^{-1}b, \tag{2}$$

sofern dessen gestörte Koeffizientenmatrix (A-S) ebenfalls regulär ausfällt. Man versieht in (2) die Störmatrix S mit dem Faktor ε und erhält

$$(A-\varepsilon S)x=b;\ \ \varepsilon=\begin{cases}0\rightarrow(1)\\ 1\rightarrow(2)\end{cases} \tag{3}$$

Der mit zunächst noch unbekannten Vektoren η_1; η_2; ... formulierte Lösungsansatz

$$x=x_0+\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\ldots \tag{4}$$

ergibt mit (1), (2) und (3)

$$A(E-\varepsilon A^{-1}S)(x_0+\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\ldots)=b,\ \text{d.h.,} \tag{5}$$

$$\eta_1\varepsilon+\eta_2\varepsilon^2+\ldots=\varepsilon A^{-1}Sx_0+\varepsilon^2A^{-1}S\eta_1+\ldots$$

und daraus durch Abgleich der Terme mit gleicher ε-Potenz

$$\varepsilon^1\rightarrow\ \ \eta_1\varepsilon=\varepsilon A^{-1}Sx_0\ ;\eta_1=A^{-1}SA^{-1}b$$

$$x_1=x_0+\varepsilon\eta_1=(E+A^{-1}S)A^{-1}b$$

$$\varepsilon^2\rightarrow\ \ \eta_2\varepsilon^2=\varepsilon^2A^{-1}S\eta_1;\ \eta_2=(A^{-1}S)^2A^{-1}b$$

$$x_2=x_1+\varepsilon^2\eta_2=(E+A^{-1}S+(A^{-1}S)^2)A^{-1}b,$$ **usw. für 3, 4,...,**

und schließlich für ε=1 die Lösung

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\sum_{n=0}^{\infty}(A^{-1}S)^nA^{-1}b\ \ \text{von (2)} \tag{6}$$

mit Hilfe der für $\|A^{-1}S\|<1$ konvergenten Neumannschen Reihe

$$(E-A^{-1}S)^{-1}=(E+A^{-1}S+(A^{-1}S)^2+\ldots). \tag{7}$$

Die Konvergenzbedingung für die Neumannsche Reihe $\|A^{-1}S\|<1$, die zugleich die Regularität der gestörten Koeffizientenmatris in (2) absichert, hat große Bedeutung für die praktische Anwendung der Störungsrechnung im vorliegenden Fall. Sollte $|Det(A)|$ sehr klein ausfallen, d.h. beinahe Verlust der Regularität von A, verbunden mit betragsmäßig sehr großen Elementen der inversen Matrix A^{-1}, so genügen bereits kleine Störungen, um die Konvergenzbedingung zu verletzen. Bei solcherart „schlecht konditionierten" Problemen versagt die Anwendung der Störungsrechnung. Man achte deshalb darauf, dass das idealisierte Problem bereits gut konditioniert ist!