

Mathematische Modellierung der Schädigungsentwicklung eines Waldreviers (Waldsterben)

1. Einleitung

1. 1. Vorbemerkung

Der Gesundheits- bzw. Schädigungszustand eines Waldes ist eine Größe mit Spektrumscharakter, denn die einzelnen Waldelemente (Bäume) weisen untereinander trotz gleichen Angriffs schädigender Ursachen und wirkender Heilungsursachen verschiedene Schädigungszustände von 0 (vollkommen gesund) bis 1 (total geschädigt) auf.

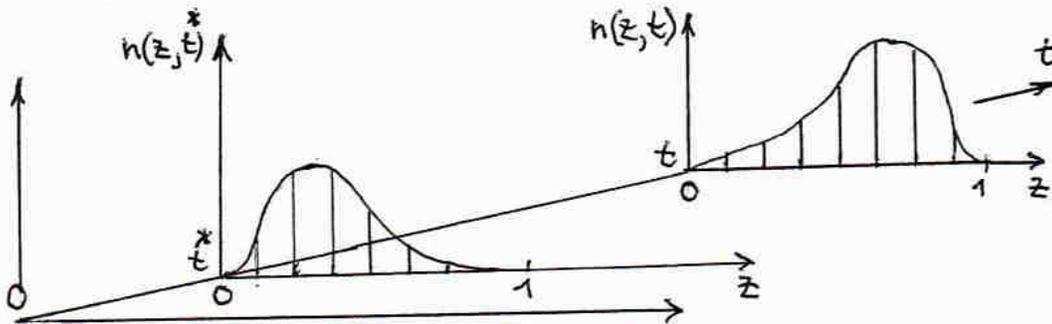


Bild 1. Schädigungszustandsentwicklung

Schädigende und heilende Ursachen wirken im Laufe der Zeit auf den Baumbestand ein und verformen dabei das Schädigungszustandsspektrum langsam (Siechtum bzw. langwierige Heilung). Die Verschiebung des Spektrumsschwerpunktes nach rechts bedeutet Tendenz Waldsterben.

Naturwissenschaftliche Modellierung und anschließende Mathematisierung einer derartigen Ursache-Wirkung-Beziehung eröffnen die Möglichkeit computerexperimenteller Vorhersagen für die zeitliche Schädigungsentwicklung (Waldsterben) und damit auch Chancen zur Gegensteuerung durch naturwissenschaftlich begründete Heilungsmaßnahmen für die Baumpopulation des Waldes und Wirksamkeitskontrollen.

1. 2. Zielstellung

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, ein mathematisches Modell (Integrodifferentialgleichung) zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung der Baumpopulation eines Waldreviers zu entwickeln und dieses Modell unter Einbeziehung verdichteter Naturraumbeobachtungsdaten für die computerexperimentelle Vorhersage des zeitlichen Schädigungsverlaufes zu nutzen.

Erwartet wird vom mathematischen Modell die Fähigkeit, sowohl die gesamte Vorgeschichte der schädigenden und heilenden Ursachen als auch deren zeitverzögerte Auswirkung auf den Schädigungszustand zu berücksichtigen und zu beschreiben.

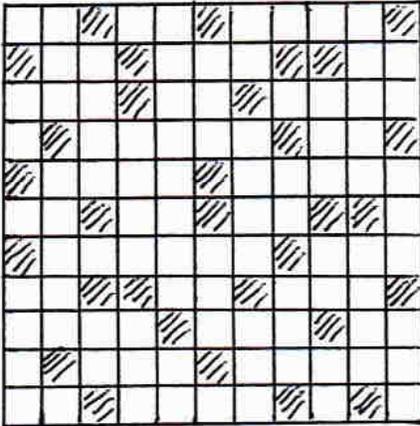
1. 3. Abgrenzung des Themas

Es erscheint im Hinblick auf die experimentellen Möglichkeiten zur Bereitstellung umfangreicher erforderlicher Naturraumbereobachtungsdatenmengen sinnvoll, das Modellierungskonzept zunächst auf die Berücksichtigung nur einer pauschalisierenden Schädigungsursache und einer pauschalisierenden Heilungsursache zu beschränken. Ferner sollen Wechselwirkungen aufgrund der Baumart und des Altersunterschiedes zwischen Teilen der gesamten Baumpopulation im Waldrevier unberücksichtigt bleiben.

Damit bedient das mathematische Modell bevorzugt eine forstwirtschaftlich angelegte Baumpopulation (Plantagenwald, in Deutschland noch vorherrschend).

2. Der forstwirtschaftliche Beitrag zur mathematischen Modellierung des Schädigungsentwicklung eines Waldreviers

Es ist dem Forstwissenschaftler empirisch möglich, das fragliche Waldrevier gemäß Revierkarte in Teilbereiche (Flecken) zu zerlegen und aus dieser Fleckenvielfalt eine nach Aufwand und Nutzen forstwissenschaftlich zweckmäßig, umfangreiche Stichprobe unter Beachtung von Rand- und Zentrumslagen und anderer Reviereigenschaften auszuwählen, s. Bild 2.



Für jeden Flecken der Stichprobe wird ein Begutachtungsblatt angelegt, s. Tafel 1, das eine Liste der dendrologischen Schädigungsmerkmale (z.B. Laub-, Wuchs-, Rinden-, Wurzelschäden, Baumfruchtmängel, Pilz- und Schädlingsbefall, usw. , insgesamt 10 Schädigungsmerkmale samt jeweiliger Ausprägtheit 0 = vollkommen gesund, 1, 2, 3, ..., 10 = total geschädigt) als „weiche“ Zensuren enthält.

Bild 2. Waldrevier mit Flecken

Tafel 1. Begutachtungsblatt (Muster)

Schädigungszustand für Fleck-Nr: .../... am (Jahr, Monat, Tag) .../.../...													
Zensuren ZJ Merkmale MI	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 = Jmax										Gewichte		
											Zensuren	GI	ZJ*GI
1				X							4	1,0	+4*1,0
2			X								2	3,0	+2*3,0
3	X										0	0,1	+0*0,1
4		X									1	0,5	+1*0,5
5									X		9	0,9	+9*0,9
6							X				7	0,5	+7*0,5
7						X					6	1,0	+6*1,0
8					X						5	1,0	+5*1,0
9					X						5	1,0	+5*1,0
10 = Imax			X								3	1,0	+3*1,0
Summe = 41,1													
Schädigungszustand = 1/(Imax * Jmax) * Summe = 0,411													
Achtung: Summe aller Gewichte muss mit Imax übereinstimmen!													

Nach Bewichtung der einzelnen Schädigungsmerkmale gemäß der Bedeutung für den Fleckengesundheitszustand entsteht für den Flecken eine Schadenszustandszahl zwischen 0 und 1, s. Tafel 1.

Nachdem alle Schädigungszustandszahlen für die Fleckenstichprobe vorliegen, lässt sich das normierte Schädigungshäufigkeitsdiagramm (Histogramm) für das Waldrevier zum Begutachtungszeitpunkt erstellen, das die relativen Schädigungsanteile seines Baumbestandes über den Schädigungszustandsklassen 0 bis 0,1; 0,1 bis 0,2; ... ; 0,9 bis 1,0, jeweils mit der Klassenmitte als Bezugspunkt, abzulesen gestattet.

Bei späterer Wiederholung des gleichen Beobachtungs- und Bewertungsaufwandes wächst allerdings der Erkenntnisgewinn über die zeitliche Schädigungsentwicklung nur mit der Geschwindigkeit, mit der sich die Vorgänge im Naturraum abspielen.

Hier greift nun das Modellierungshilfsmittel Integrodifferentialgleichung zum Nutzen für den Forstwissenschaftler, denn es wird dem Problem der Waldschädigungsentwicklung eine Gleichung zugewiesen, deren Lösung unter Einbeziehung anfallender neuer empirischer Daten die Zeitabhängigkeit der Schädigungsentwicklung vorherzusagen gestattet, kurzum, immer treffsicherer in den Prognosezeitraum vorausgreift, dem Forstwissenschaftler nach dem rasch durchführbaren Computerexperiment Handlungszeiträume unter Echtzeitbedingungen erschließt und dem Forstwirtschaftler Maßnahmen zur Verbesserung des Wasserkreislaufs, zur Schadstoffsanierung, zur Neutralisation (Kalkgabe) oder zur Schädlingsbekämpfung ermöglicht.

3. Das Modellierungshilfsmittel Integrodifferentialgleichung zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung

3. 1. Das äußere Modell (Top-Down-Entwurf)

Zur Zeit $0 < t_0 < t$ liegt die Schädigungszustandsdichtefunktion $n(z,t) > 0$ für eine unterschiedlich stark geschädigte Baumpopulation als geglättetes Histogramm, d.h.,

$$\int_0^1 n(z,t) * dz = 1 \text{ für } t > t_0,$$

über dem Schädigungszustand z mit $0 < z < 1$ vor, s. Bild 3.

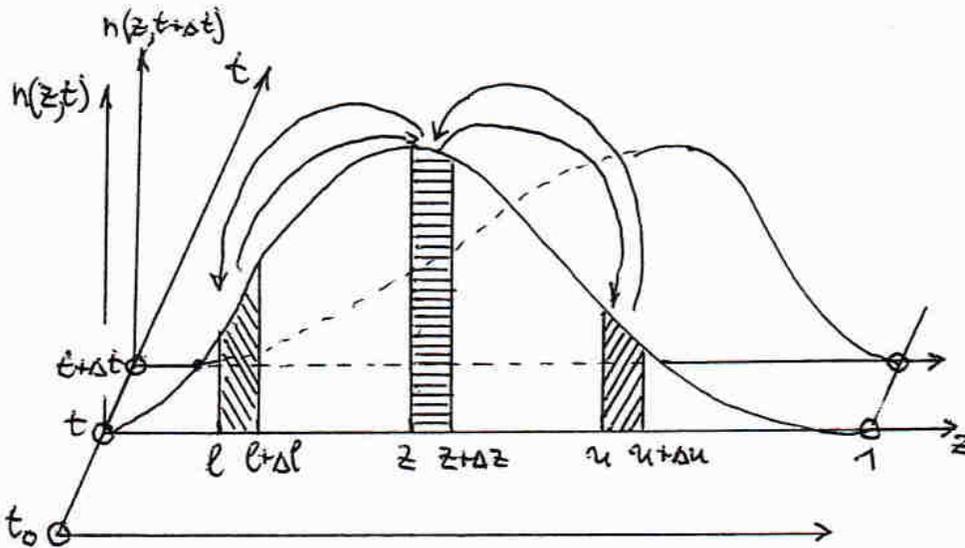


Bild 3. Schädigungszustandsdichtefunktion $n(z,t)$ für $t > 0$

Über den Schädigungszustandsintervallen

$$(l, l + \Delta l)$$

$$(z, z + \Delta z)$$

$$(u, u + \Delta u)$$

befinden sich zum Zeitpunkt $t > t_0$ näherungsweise die zugehörigen Populationsanteile

$$n(l,t) * \Delta l$$

$$n(z,t) * \Delta z$$

$$n(u,t) * \Delta u.$$

Entsprechend der in Bild 3 skizzierten Ursachen Schädigungs- und Heilungseinfluss finden im Zeitintervall $(t, t + \Delta t)$ Anteilsumlagerungen statt. Durch Schädigung geht während Δt aus dem Intervall $(l, l + \Delta l)$ der Anteil

$$n(l,t) * \Delta l * s(l,z,t) * \Delta z * \Delta t, \quad s(l,z,t) \text{ Wirkungsfunktion, in das Intervall}$$

$(z, z + \Delta z)$ mit $z > l$ als Umlagerung nach rechts über, insgesamt ergibt sich für das Intervall $(z, z + \Delta z)$ der Zugang durch Schädigung während Δt nach Integration zu

$$\Delta z * \Delta t * \int_0^z n(l,t) * s(l,z,t) * dl$$

woraus nach Division durch $\Delta z \cdot \Delta t$ und anschließendem Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ die Integrodifferentialgleichung für die Schädigungsentwicklung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(z,t) = \int_0^z n(l,t) \cdot s(l,z,t) \cdot dl + \int_z^1 n(u,t) \cdot h(z,u,t) \cdot du - n(z,t) \cdot \left(\int_z^1 s(z,u,t) \cdot du + \int_0^z h(l,z,t) \cdot du \right) \quad (2)$$

entsteht.

(2) enthält ersichtlich Bestandteile sowohl einer Differentialgleichung als auch einer Integralgleichung, woraus sich der Name Integrodifferentialgleichung erklärt. Über die Integrodifferentialgleichungen und deren Anwendungen informieren z.B. Adachi (1956), Bass (1954), Collatz (1955), Cushing (1977), Bass (1954), Karman (1916), Volterra (1914), Walter/Dejon (1960).

3. 2. Das innere Modell (Bottom-Up-Entwurf)

3. 2. 1. Erwartungen an das innere Modell

Bei der Konstruktion der im Abschnitt 3. 1. eingeführten Wirkungsfunktionen, dort vorläufig nur als Platzhalter benutzt, ist zunächst die plausible Eigenschaft zu beachten, dass leicht geschädigte Klassenanteile bevorzugt ausheilen und schwer geschädigte Klassenanteile bevorzugt weiter geschädigt werden, und Umlagerungen zu den eng benachbarten Klassen viel häufiger sind als Umlagerungen zu weit entfernten Klassen. Diese Überlegung vermeidet die für lebende Objekte wirklichkeitsfremde Polarisierung der Population in überwiegend total gesunde und überwiegend total geschädigte Bäume des Waldreviers.

Ferner ist zu berücksichtigen, dass schädigende und heilende äußere Einflüsse nicht spontan wirken, sondern erst allmählich ihre Wirkung am lebenden Organismus Baum entfalten. Hierzu ist das im Bereich der Biowissenschaften vielfach bewährte Modell der Differentialgleichung für das logistische Wachstum, s. Anhang, mit ihrer geschlossen berechenbaren Lösung verwendbar, um die Zeitabhängigkeit des Umlagerungsgeschehens zwischen den Schädigungsklassen zu modellieren.

3. 2. 2. Modellbestandteile für das innere Modell

3. 2. 2. 1. Einfluss des Schädigungszustandes auf das Umlagerungsgeschehen

3. 2. 2. 1. 1. Umlagerung von zu nach z durch Schädigung

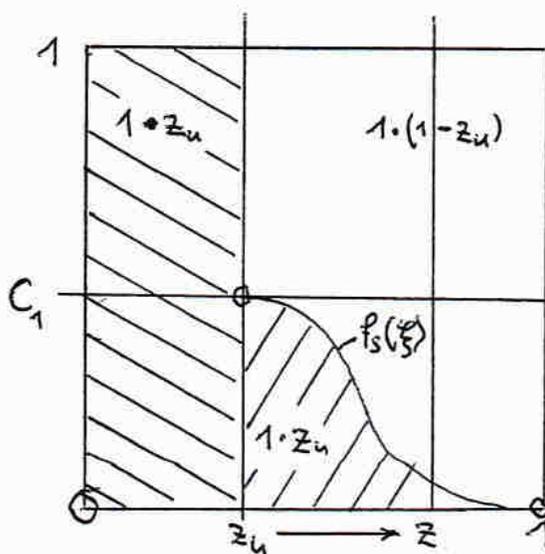


Bild 4. Umlagerungsfunktion $f_s(\xi)$

Das in Bild 4 gezeichnete Einheitsquadrat wird zerlegt in die beiden Rechtecke $1 * z_u$ (Heilung von zu aus) und $1 * (1 - z_u)$ (Schädigung von zu aus). Die Ordinate C_1 ist so zu bestimmen, dass für die über $z_u \leq \xi \leq 1$ gezeichnete Funktion $f_s(\xi)$ gilt

$$\int_{z_u}^1 f_s(\xi) * d\xi = 1 * z_u.$$

Der Ansatz für die Funktion $fs(\xi) = a_0 + a_2 \cdot (\xi - z_u)^2 + a_4 \cdot (\xi - z_u)^4$ soll zusätzlich die Bedingungen: $fs(1) = 0$, $fs(z_u) = C_1$, $fs'(1) = 0$, $fs'(z_u) = 0$ erfüllen. Man erhält nach kurzer Rechnung

$$C_1 = \frac{15}{8} \cdot \frac{z_u}{1 - z_u} \quad \text{und die Funktion } fs(\xi) = C_1 \cdot \left(1 - \left(\frac{\xi - z_u}{1 - z_u}\right)^2\right)^4. \quad (1)$$

3. 2. 2. 1. 2. Umlagerung von z_0 nach z durch Heilung

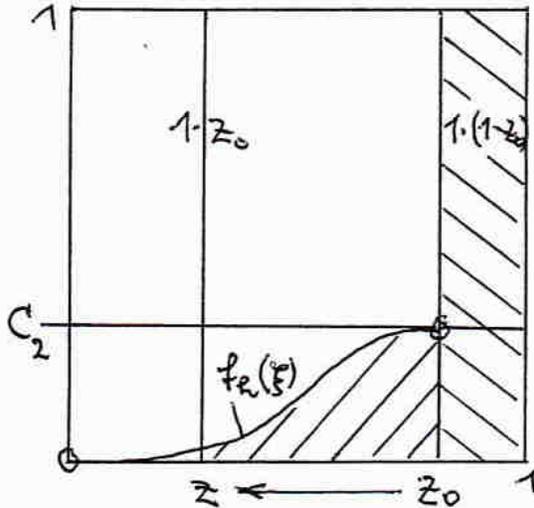


Bild 5. Umlagerungsfunktion $fh(\xi)$

Das in Bild 5 gezeichnete Einheitsquadrat wird zerlegt in die beiden Rechtecke $1 \cdot z_0$ (Heilung von z_0 aus) und $1 \cdot (1 - z_0)$ (Schädigung von z_0 aus). Die Ordinate C_2 ist so zu bestimmen, dass für die über $0 \leq \xi \leq z_0$ gezeichnete Funktion $fh(\xi)$ gilt

$$\int_0^{z_0} fh(\xi) \cdot d\xi = 1 \cdot (1 - z_0).$$

Der Ansatz für die Funktion $fh(\xi) = b_0 + b_2 \cdot (\xi - z_0)^2 + b_4 \cdot (\xi - z_0)^4$ soll zusätzlich die Bedingungen: $fh(0) = 0$, $fh(z_0) = C_2$, $fh'(0) = 0$, $fh'(z_0) = 0$ erfüllen. Man erhält nach kurzer Rechnung

$$C_2 = \frac{15}{8} \cdot \frac{1 - z_0}{z_0} \quad \text{und die Funktion } fh(\xi) = C_2 \cdot \left(1 - \left(\frac{\xi - z_0}{z_0}\right)^2\right)^4. \quad (1)$$

3. 2. 2. 1. 3. Umlagerung von z nach z₀ durch Schädigung

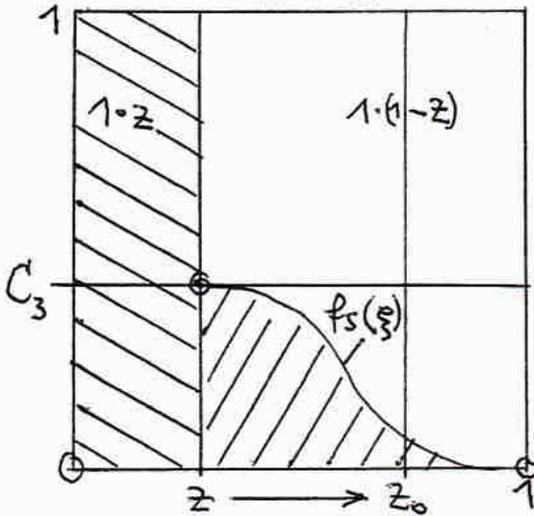


Bild 6. Umlagerungsfunktion $f_s(\xi)$

Das in Bild 6 gezeichnete Einheitsquadrat wird zerlegt in die beiden Rechtecke $1 \cdot z$ (Heilung z aus) und $1 \cdot (1 - z)$ (Schädigung von z aus). Die Ordinate C_3 ist so zu bestimmen, dass für die über $z < \xi < 1$ gezeichnete Funktion $f_s(\xi)$ gilt

$$\int_z^1 f_s(\xi) \cdot d\xi = 1 \cdot z.$$

Der Ansatz für die Funktion $f_s(\xi) = c_0 + c_2 \cdot (\xi - z)^2 + c_4 \cdot (\xi - z)^4$ soll zusätzlich die Bedingungen: $f_s(1) = 0$, $f_s(z) = C_3$, $f_s'(1) = 0$, $f_s'(z) = 0$ erfüllen. Man erhält nach kurzer Rechnung

$$C_3 = \frac{15}{8} \cdot \frac{z}{1 - z} \quad \text{und die Funktion } f_s(\xi) = C_3 \cdot \left(1 - \left(\frac{\xi - z}{1 - z} \right)^2 \right)^4. \quad (1)$$

3. 2. 2. 1. 4. Umlagerung von z nach z₀ durch Heilung

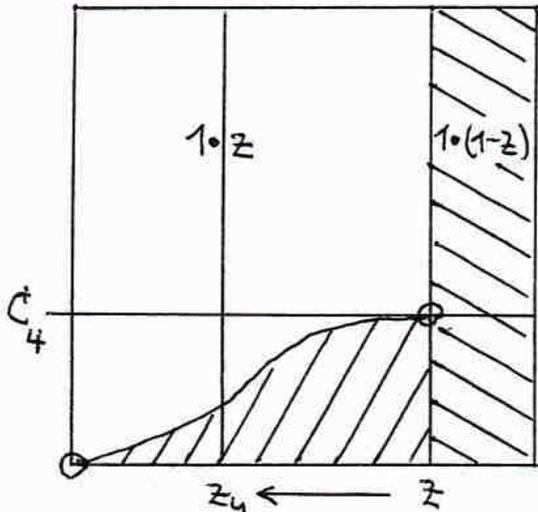


Bild 7. Umlagerungsfunktion $f_h(\xi)$

Das in Bild 7 gezeichnete Einheitsquadrat wird zerlegt in die beiden Rechtecke $1 \cdot z$ (Heilung von z aus) und $1 \cdot (1 - z)$ (Schädigung von z aus). Die Ordinate C_4 ist so zu bestimmen, dass für die über $0 \leq \xi \leq z$ gezeichnete Funktion $f_h(\xi)$ gilt

$$\int_0^z f_h(\xi) \cdot d\xi = 1 \cdot (1 - z).$$

Der Ansatz für die Funktion $f_h(\xi) = d_0 + d_2 \cdot (\xi - z)^2 + d_4 \cdot (\xi - z)^4$ soll zusätzlich die Bedingungen: $f_h(z) = C_4$, $f_h(0) = 0$, $f_h'(z) = 0$, $f_h'(0) = 0$ erfüllen.

Man erhält nach kurzer Rechnung

$$C_4 = \frac{15}{8} * \frac{1-z}{z} \text{ und die Funktion } fh(\xi) = C_4 * \left(1 - \left(\frac{\xi - z^2}{1-z}\right)^4\right). \quad (1)$$

3. 2. 2. Einfluss der Schädigungsvorgeschichte auf das Umlagerungsge- schehen

Die im Anhang vorgestellte Funktion für das verallgemeinerte logistische Wachstum lässt sich gut verwenden, um die allmähliche Einflussnahme schädigender oder heilender äußerer Ursachen auf die Änderung des Schädigungszustandes zu modellieren.

Für die zeitabhängige Schädigung verwendet man die Funktion

$$\varphi(z,t) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{n(z,t_0)} - 1\right) e^{-\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau}\right)^{1/\beta}} > n(z,t_0) \quad (1)$$

für $t_0 < t < +\infty$ als Faktor in der Wirkungsfunktion für Schädigung, und für die zeitabhängige Heilung verwendet man die Funktion

$$\psi(z,t) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{n(z,t_0)} - 1\right) e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau}\right)^{1/\beta}} > n(z,t_0) \quad (2)$$

für $t_0 < t < +\infty$ als Faktor in der Wirkungsfunktion für Heilung.

Mit diesem zeitabhängigen Modellierungsbestandteil erhalten schädigende und heilende äußere Ursachen erst dann Einfluss auf das Umlagerungsge-
schehen, wenn Intensität und Einwirkungsdauer wirksame Beiträge zu den
Integralen

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \quad \text{bzw.} \quad \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau$$

in den zuständigen logistischen Gleichungen (1) und (2) zu liefern beginnen, oder anders gesagt, nur kurzfristig auftretende Spitzenwerte für die schädigende $\gamma(t)$ bzw. heilende $\delta(t)$ Ursache bleiben beinahe wirkungslos.

4. Komplettierung der Integrodifferentialgleichung für die Schädigungsent- wicklung

In der Integrodifferentialgleichung für die Schädigungsentwicklung, vgl. (2) im Abschnitt 3. 1., traten vier Varianten von Wirkungsfunktionen auf:

$s(l,z,t)$ Umlagerung von l nach z (Schädigung) }
 $h(z,u,t)$ Umlagerung von u nach z (Heilung) } Zugänge nach z

$s(z,u,t)$ Umlagerung von z nach u (Schädigung) }
 $h(z,l,t)$ Umlagerung von z nach l (Heilung) } Abgänge von z .

Dafür sind die vier vorbereiteten Funktionen aus dem Abschnitt 3. 2. 2. 1. absprungsbezogen als Faktoren zu verwenden.

$$\begin{array}{l}
 fs(z) = \frac{15}{8} * \frac{1}{1-l} * \left(1 - \left(\frac{1-z}{1-l}\right)^2\right) \quad l \rightarrow z \text{ Schädigung} \\
 fh(z) = \frac{15}{8} * \frac{1-u}{u} * \left(1 - \left(\frac{u-z}{u}\right)^2\right) \quad u \rightarrow z \text{ Heilung} \\
 fs(u) = \frac{15}{8} * \frac{z}{1-z} * \left(1 - \left(\frac{z-u}{1-z}\right)^2\right) \quad z \rightarrow u \text{ Schädigung} \\
 fh(l) = \frac{15}{8} * \frac{1-z}{z} * \left(1 - \left(\frac{z-l}{z}\right)^2\right) \quad z \rightarrow l \text{ Heilung}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Zugänge nach } z \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Abgänge von } z
 \end{array}$$

Als weitere Faktoren in den Wirkungsfunktionen treten die vier Varianten für die zeitabhängigen Einflüsse bei Schädigung und Heilung auf, s. Abschnitt 3. 2. 2. 2.

$$l \rightarrow z \text{ Schädigung } \varphi(l,t) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{n(l,t_0)} - 1\right) * e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) * d\tau}\right)^{1/\delta}}$$

$$u \rightarrow z \text{ Heilung } \gamma(u,t) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{n(u,t_0)} - 1\right) * e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) * d\tau}\right)^{1/\delta}}$$

$$z \rightarrow u \text{ Schädigung } \varphi(z,t) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{n(z,t_0)} - 1\right) * e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) * d\tau}\right)^{1/\delta}}$$

$z \rightarrow l$ Heilung

$$\psi(z,t) = \frac{1}{n(z,t_0) \left(1 + \left(\frac{1}{n(z,t_0)} - 1\right) e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau}\right)^{1/\beta}}$$

Mit der Eintragung der Faktoren in die Wirkungsfaktoren nimmt die Integrodifferentialgleichung für die Schädigungsentwicklung die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} n(z,t) =$$

$$= \frac{15}{8} \int_0^z n(l,t) \frac{1}{1-l} \left(1 - \left(\frac{z-l}{1-l}\right)^2\right) \frac{1}{n(l,t_0) \left(1 + \left(\frac{1}{n(l,t_0)} - 1\right) e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau}\right)^{1/\beta}} dl$$

$$+ \frac{15}{8} \int_z^1 (u,t) \frac{1-u}{u} \left(1 - \left(\frac{u-z}{u}\right)^2\right) \frac{1}{n(u,t_0) \left(1 + \left(\frac{1}{n(u,t_0)} - 1\right) e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau}\right)^{1/\beta}} du$$

$$- \frac{15}{8} n(z,t) \frac{z}{1-z} \frac{1}{n(z,t_0) \left(1 + \left(\frac{1}{n(z,t_0)} - 1\right) e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau}\right)^{1/\beta}} \int_z^1 \left(1 - \left(\frac{z-u}{1-z}\right)^2\right) du$$

$$+ \frac{1-z}{z} \frac{1}{n(z,t_0) \left(1 + \left(\frac{1}{n(z,t_0)} - 1\right) e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau}\right)^{1/\beta}} \int_0^z \left(1 - \left(\frac{z-l}{z}\right)^2\right) dl$$

an.

(1)

Da an der unteren und an der oberen Schädigungsklasse nur Umlagerungen in eine Richtung vorkommen können, fallen für diese Fälle entsprechende Terme in (1) weg.

Für die Umlagerungen von z aus sind Integrationen in (1) ausführbar.

5. Bemerkungen zur rechentechnischen Behandlung

Die rechentechnische Behandlung der Integrodifferentialgleichung gelingt nach ihrer Überführung in ein System expliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen, die durch Diskretisierung der Integrodifferentialgleichung bezüglich des Schadenszustandes entstehen, also den Anschluss an das ursprüngliche Schädigungszustandshistogramm mit seinen diskreten Schädigungszustandsklassen finden.

Das entstehende Differentialgleichungssystem besitzt den Vektor der Anfangswerte in Gestalt des Histogramms zum Zeitpunkt t_0 . Das System wird rechentechnisch im Einschrittverfahren bezüglich der Zeit t mit zweckmäßiger Schrittweite numerisch bearbeitet, s. Grigorieff (1972), Collatz (1960), Ralston/Wilf (1972/1979), Hanke-Bourgeois (2002) u. a., wozu die einzelnen Differentialgleichungen separat nacheinander und nach der Einzelschrittmethode gekoppelt über mehrere iterative Durchläufe hinweg integriert werden.

Für die Integration einer einzelnen Differentialgleichung nach dem Prediktor-Korrektor-Verfahren lässt sich unter Differenzierbarkeitsvoraussetzung der rechten Seite in $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ diese rechte Seite durch ihre Taylorlinearisierung

$$f^*(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) \quad (1)$$

näherungsweise ersetzen, wobei eine lineare Näherungsdifferentialgleichung entsteht, die elementar integrierbar ist und anfallende Integrale auf Grundintegrale zurückzuführen gestattet (Prediktor). Schreibt man die gegebene Differentialgleichung um in

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\varrho, y(\varrho)) d\varrho, \text{ lässt sich der Korrektorschritt iterativ über}$$

$$y_{(n+1)}(x_0+h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(\varrho, y_{(n)}(\varrho)) d\varrho, n=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

organisieren, wobei die zumeist numerisch auszuführende Integration zweckmäßigerweise mit dem eingebauten Rombergschen Integrationsverfahren auszuführen ist, s. Maeß (1988), Stiefel (1961), als Startnäherung für den Korrektor nimmt man für $y(x)$ die Näherungslösung des Prediktors.

(0)

Möglich ist auch der Angriff auf die gegebene Differentialgleichung mit Hilfe der Störungsrechnung. Man schreibt die gegebene Differentialgleichung um in

$$y' = f^*(x,y) + \xi^*(f(x,y) - f^*(x,y)), \quad (\xi \text{ ist ein Parameter.}), \quad (3)$$

und trägt den Ansatz

$$y(x) = y_0(x) + \xi \rho_1(x) + \xi^2 \rho_2(x) + \dots \quad (4)$$

links und rechts in (3) ein, entwickelt die entstandene rechte Seite nach Potenzen von ξ an der Stelle $\xi = 0$ und behandelt die Terme mit gleicher

ξ -Potenz rechts und links durch Integration, Ob Verbesserungen zur Näherungslösung mit $\xi = 1$ im Ansatz (4) erreicht werden konnten, muss überprüft werden, s. Bellman (1967).

Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen können beim Vorliegen numerisch aufwandsähnlicher rechter Seiten auch vorteilhaft durch Nutzung eines Parallelrechners bearbeitet werden, s. Braune (2010).

Anhang

Das logistische Wachstum

1. Das vereinfachte logistische Wachstum

Der Ansatz für vereinfachte logistische Wachstum eignet sich z.B. zur Beschreibung der Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit innerhalb einer begrenzten Population. Hierbei wirken zwei plausible Eigenschaften auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Krankheit ein.

Zunächst ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit proportional der Anzahl der bereits Erkrankten, d. h., viele Kranke können auch viele Gesunde anstecken. Hieraus erklärt sich die enorm rasche Zunahme der Erkranktenanzahl in der Anfangsphase (näherungsweise exponentielles Wachstum). Später verliert das Wachstum an Tempo, denn die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist plausiblerweise auch proportional der Anzahl der noch nicht Erkrankten, und diese Anzahl wird in der begrenzten Population ständig kleiner. Hieraus erklärt sich die asymptotische Annäherung der Erkranktenanzahl von unten an die Anzahl der überhaupt vorhandenen erkrankbaren Mitglieder der Population, d.h., nach längerer Zeit sind dann praktisch alle überhaupt ansteckbaren Populationsmitglieder erkrankt.

Sei M die Anzahl aller ansteckbaren Populationsmitglieder, sei ferner $N(t)$ die Anzahl der Erkrankten zum Zeitpunkt $t > t_0$, entsprechend $N(t_0) = N_0 > 0$ ihr Anfangswert, so lautet das Anfangswertproblem für das vereinfachte logistische Wachstum

$$N = \lambda * N(t) * (M - N(t)); \quad N(t_0) = N_0 > 0, \quad (\lambda > 0 \text{ Konstante}) \quad (1)$$

$$\frac{dN}{dt} = \lambda * N(t) * M - \lambda * N^2(t)$$

mit einer ersichtlich Bernoullischen Differentialgleichung, s. Ince (1948).
Die Variablensubstitution

$$u(t) = \frac{1-N}{N}; \quad \dot{u} = -\frac{1}{N} \dot{N}; \quad \dot{N} = -N^2 \dot{u} \quad (2)$$

überführt (1) in die lineare Differentialgleichung

$$-N^2 \dot{u} = \lambda * M * N - \lambda * N^2; \quad -\dot{u} = \lambda * M * \frac{1}{N} - \lambda; \quad \dot{u} = \lambda * (1 - M * u), \quad (3)$$

und die nochmalige Variablensubstitution

$$v(t) = \lambda \cdot (1 - M \cdot u); \quad \dot{v} = -\lambda \cdot M \cdot \dot{u}; \quad \dot{u} = -\frac{\dot{v}}{\lambda \cdot M} \quad (4)$$

ergibt

$$-\frac{\dot{v}}{\lambda \cdot M} = v; \quad \frac{dv}{v} = -\lambda \cdot M \cdot dt; \quad \ln(v) = -\lambda \cdot M \cdot t + \ln(C); \quad v(t) = C \cdot e^{-\lambda \cdot M \cdot t} \quad (5)$$

Beide Rücksubstitutionen liefern die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für das vereinfachte logistische Wachstum

$$\lambda \cdot \left(1 - \frac{M}{N(t)}\right) = C \cdot e^{-\lambda \cdot M \cdot t} \quad (6)$$

Die Integrationskonstante C berechnet man mit Hilfe der Anfangsbedingung (1) zu

$$\lambda \cdot \left(1 - \frac{M}{N_0}\right) = C \cdot e^{-\lambda \cdot M \cdot t_0}; \quad C = \lambda \cdot \left(1 - \frac{M}{N_0}\right) \cdot e^{+\lambda \cdot M \cdot t_0} \quad (7)$$

woraus sich die spezielle Lösung der Differentialgleichung und zugleich die Lösung des Anfangswertproblems

$$N(t) = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-\lambda \cdot M \cdot (t - t_0)}} < M \text{ für } 0 < t_0 < t < +\infty \quad (8)$$

angeben lässt.

Wegen des Grenzwertes $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = M$ und des monotonen Wachstums

der Funktion $N(t)$ kann die Erkranktenanzahl $N(t)$ zu keiner Zeit die Anzahl M der erkrankbaren Populationsmitglieder übertreffen.

Mit der Lösungsfunktion $N(t)$ für das vereinfachte logistische Wachstum erreicht man somit einen S-förmigen Übergang vom Startniveau N_0 zum Sättigungsniveau M auf asymptotische Weise, s. Bild 8.

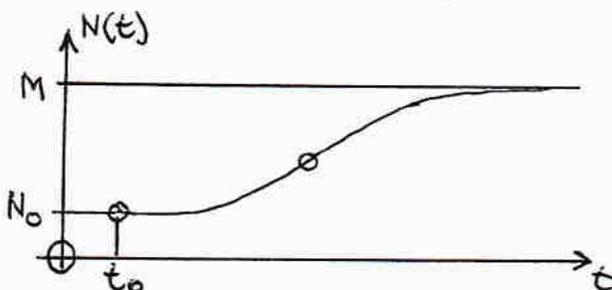


Bild 8. Qualitative Darstellung von $N(t)$

Die zeitliche Ableitung $\dot{N}(t)$ zeigt Bild 9.

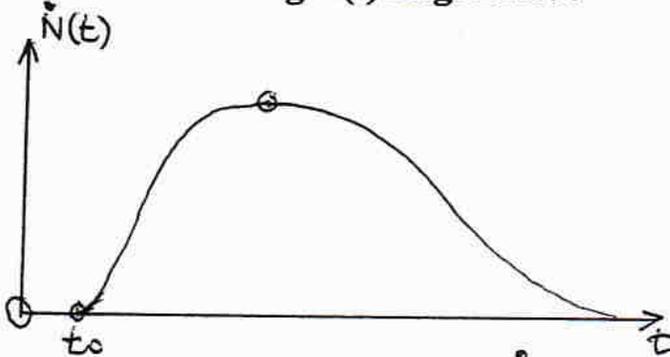


Bild 9. Qualitative Darstellung von $\dot{N}(t)$

2. Das verallgemeinerte logistische Wachstum

Von Gilpin und Ayala, s. Gilpin / Ayala (1973) stammt das erweiterte Modell

$$\dot{N} = \gamma * N * \left(1 - \frac{N}{M}\right)^{\beta}; \quad N(t_0) = N_0 > 0; \quad \gamma > 0; \quad \beta > 0 \text{ Parameter.}$$

Der zusätzliche Parameter β verbessert die Anpassbarkeit an reale Wachstumsvorgänge in den Biowissenschaften.

Dieses Modell lässt sich nocheinmal erweitern durch Einführung der Funktion

$$\gamma(t) > 0 \text{ für } 0 < t_0 < t < +\infty \text{ und } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \gamma(\tau) * d\tau = +\infty$$

als Forderung, die sich praktisch immer erfüllen lässt, also

$$\dot{N} = \gamma(t) * N * \left(1 - \frac{N}{M}\right)^{\beta}; \quad N(t_0) = N_0 > 0$$

$$\dot{N} = \gamma(t) * N - \gamma(t) * \frac{N^{(\beta+1)}}{M^{\beta}}; \quad N(t_0) = N_0 > 0. \quad (1)$$

Zur Behandlung dieser Bernoullischen Differentialgleichung wird die Variablensubstitution

$$u(t) = N^{\beta+1} = \frac{1 - (\beta+1)}{\beta} \frac{1}{N}; \quad \dot{u} = - \frac{\beta * \dot{N}}{N^{\beta+1}}; \quad \dot{N} = - \frac{\dot{u} * N^{\beta+1}}{\beta} \quad (2)$$

vorgenommen, wodurch aus (1) die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 -\frac{\dot{u} * N}{\mathcal{D}} &= \mathcal{F}(t) * N - \mathcal{F}(t) * \frac{N}{\mathcal{D}} \\
 \dot{u} &= -\mathcal{D} * \mathcal{F}(t) * \frac{N}{N * N} + \frac{\mathcal{D} * \mathcal{F}(t)}{\mathcal{D}} \\
 \dot{u} &= -\mathcal{D} * \mathcal{F}(t) * u + \frac{\mathcal{D} * \mathcal{F}(t)}{\mathcal{D}} \quad (3)
 \end{aligned}$$

entsteht. Die homogene Differentialgleichung

$$\dot{u} = -\mathcal{D} * \mathcal{F}(t) * u \quad (4)$$

besitzt die Lösung

$$u(t) = u_0 * e^{-\mathcal{D} \int_{t_0}^t \mathcal{F}(\tau) * d\tau}, \quad (5)$$

und zur Behandlung der inhomogenen Differentialgleichung (3) wird die Methode der Variation der Konstanten benutzt. Aus der inhomogenen Differentialgleichung (3) entnimmt man durch Eintrag des Ansatzes

$$u(t) = u_0(t) * e^{-\mathcal{D} \int_{t_0}^t \mathcal{F}(\tau) * d\tau} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_0 * e^{-\mathcal{D} \int_{t_0}^t \mathcal{F}(\tau) * d\tau} + u_0 * e^{-\mathcal{D} \int_{t_0}^t \mathcal{F}(\tau) * d\tau} * (-\mathcal{D}) * \mathcal{F}(t) &= \\
 = u_0 * e^{-\mathcal{D} \int_{t_0}^t \mathcal{F}(\tau) * d\tau} * (-\mathcal{D}) * \mathcal{F}(t) + \frac{\mathcal{D}}{M * \mathcal{D}} * \mathcal{F}(t) & \\
 \dot{u}_0 = \frac{\mathcal{D}}{M * \mathcal{D}} * \mathcal{F}(t) * e^{+\mathcal{D} \int_{t_0}^t \mathcal{F}(\tau) * d\tau} & \quad (7)
 \end{aligned}$$

zur Bestimmung der Stammfunktion $u_0(t)$

$$u_0(t) = \frac{1}{M * \mathcal{D}} * e^{+\mathcal{D} \int_{t_0}^t \mathcal{F}(\tau) * d\tau} + \frac{C}{M * \mathcal{D}} \quad (8)$$

mit der Integrationskonstanten C.

Aus (6) und (8) ergibt sich

$$u(t) = \left(\frac{1}{M^{\gamma}} e^{+\gamma \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau} + \frac{C}{M^{\gamma}} e^{-\gamma \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau} \right)$$

$$u(t) = \frac{1}{M^{\gamma}} \left(1 + C e^{-\gamma \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau} \right) \quad (9)$$

und nach Rücksubstitution (2)

$$N^{\gamma} = \frac{M^{\gamma}}{1 + C e^{-\gamma \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau}}, \quad (10)$$

womit die Integrationskonstante C aus der Anfangsbedingung $N(t_0) = N_0$ festgelegt werden kann.

$$N_0^{\gamma} = \frac{M^{\gamma}}{1 + C}; \quad 1 + C = \frac{M^{\gamma}}{N_0^{\gamma}}; \quad C = \left(\frac{M^{\gamma}}{N_0^{\gamma}} - 1 \right) \quad (11)$$

Die Lösungsfunktion für das verallgemeinerte logistische Wachstum lautet für $0 < t_0 < t < +\infty$

$$N(t) = \frac{M}{\left(1 + \left(\frac{M}{N_0} - 1 \right) e^{-\gamma \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau} \right)^{1/\gamma}} > N_0. \quad (12)$$

Der Ersatz der Konstanten γ durch die zeitabhängige Funktion $\delta(t)$ prägt dem S-förmigen Übergang von N_0 zu M zeitabhängige Schwankungen, z.B. Periodizitäten auf. Damit wird das logistische Wachstum an weitere, zeitabhängige Einflüsse anpassbar.

Literaturverzeichnis

- Adachi, R. On the Numerical Solutions of some Integro-Differential Equations under some Conditions (1956) ?**
- Bass, L. Zur Theorie der Mahlvorgänge
ZAMP Vol. V (1954) S. 283 – 292**
- Bellman, R. Methoden der Störungsrechnung in Mathematik, Physik und Technik
R. Oldenbourg Verlag München (1967)**
- Braune, M. Vorschlag zur mathematischen Modellierung eines Schädigungsverlaufs
ZfI-Mitteilungen Leipzig Nr. 166 (1991) S. 119 – 123**
- Braune, M. Die geschlossene Deponie Möckern und ihre Umgebung in Bildern (Stand August 1991)
Leipzig (1991) unveröffentlicht**
- Braune, M. Mathematische Modellierung des Zusammenhangs zwischen zeitlich veränderlicher Landnutzung, Sickerwasser- und Schadstofftransport im Boden mit resultierender Schädigungsentwicklung
Leipzig (1992) unveröffentlicht**
- Braune, M. Vorbereitung des Computereinsatzes zur Ermittlung der geometrischen Gestalt eines großen Deponiekörpers
Leipzig (1992) unveröffentlicht**
- Braune, M. Thematischer Ablaufplan (Grobvorstellung) zur Vorbereitung von Sanierungsaufgaben
Leipzig (1992) unveröffentlicht**
- Braune, M. Hinweise auf frühere Nutzungsformen des Deponieuntergrundes der ehemaligen Deponie Möckern
Leipzig, (1993) unveröffentlicht**
- Braune, M. Vorschläge zur teilweisen Sanierung und Umnutzung des Deponiekörpers der ehemaligen Deponie Möckern und seiner Umgebung
Leipzig (1993) unveröffentlicht**

- Braune, M. Eine vierstufige Hierarchie mathematischer Modelle zur Behandlung umweltrelevanter Fragestellungen**
in: Synergie, Syntropie, Nichtlineare Systeme, Nachhaltigkeit,
herausgeg. von W. Eisenberg, U. Renner u.a.
Verlag im Wissenschaftszentrum Leipzig (1996) S. 57 – 72
- Braune, M. Parallelrechnereinsatz für das Demonstrationsbeispiel Gammastrahlungstransport im homogenen schlanken Stab**
in: Fey, D. Grid-Computing Springer-Verlag Berlin (2010)
- Collatz, L. Numerische Behandlung von Differentialgleichungen**
Springer-Verlag Berlin (1955)
- Collatz, L. The Numerical Treatment of Differential Equations**
Springer-Verlag Berlin (1960)
- Cushing, J. M. Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics**
Springer-Verlag Berlin (1977)
- Faires, J. D. / Burden, R. L. Numerische Methoden**
Näherungsverfahren und ihre praktische Anwendung
Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg,
Berlin, Oxford (1994)
- Grigorieff, R. D. Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen**
Band 1 Einschrittverfahren
Verlag B. G. Teubner Stuttgart (1972)
- Gilpin M. E. / Ayala, F. J. Global models of growth and competition**
Proc. Nat. Acad. Sci. 70 (1973) 3590 - 3593
- Hanke-Bourgeois Grundlagen der Numerischen Mathematik und des wissenschaftlichen Rechnens**
Verlag B. G. Teubner Stuttgart (2002)
- Heuser, H. Gewöhnliche Differentialgleichungen**
Verlag B. G. Teubner Stuttgart (1989)
- Hildebrand, F. B. Methods of Applied Mathematics**
Dover Publications, Inc. New York (1992)

- Householder, A. S. Principles of Numerical Analysis**
Dover Publications, Inc. New York (1981)
- Ince, E. L. Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen**
A. Francke Verlag Berlin (1948)
- Ince, E. L. Ordinary Differential Equations**
Dover Publications, Inc. New York (1956)
- Maeß, G. Vorlesungen über Numerische Mathematik**
Teil II Analysis
Akademie-Verlag Berlin (1988)
- Pielou, E. C. An Introduction to Mathematical Ecology**
John Wiley and Sons New York (1969)
- Ralston, A. / Wilf, H. S. Mathematische Methoden für Digital-
rechner Teile I und II**
R. Oldenbourg Verlag München (1972 / 1979)
- Rutishauser, H. Vorlesungen über Numerische Mathematik**
Band 2
Differentialgleichungen und Eigenwertprobleme
Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1976)
- Stiefel, E. Altes und Neues über numerische Quadratur**
ZAMM 41 (1961) Heft 10 / 11 S. 408 - 413
- v. Karman, Th. Das Gedächtnis der Materie**
Die Naturwissenschaften Band 4, H. 33 (1916) S. 489 - 494
- Volterra, V. Drei Vorlesungen über neue Fortschritte der Mathematischen
Physik**
Dritte Vorlesung S. 155 - 181
Verlag B. G. Teubner Leipzig (1914)
- Walter, A. / Dejon, B. General Report on The Numerical Treatment of In-
tegral and Integro-Differential Equations**
Proc. Symp. On Num. Treatm. of Ord. Diff. Equat.,
Integral and Integro. Diff. Equat. Rom 1960
Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart (1960)

**Weth, D. Modellsystem zur Beschreibung von Transportprozessen im Boden
Hannover (1990)**

**Anschrift des Autors: Dr. rer. nat. Manfred Braune, Geibelstraße 31, 04129
Leipzig**